Presentazione di *Guida alla teoria degli insiemi*[*]

1. Quando ho letto per la prima volta il titolo del suo libro: "Guida alla teoria degli insiemi" mi è venuto in mente il mio primo anno di ginnasio nel 1964, in una sezione di un liceo classico con la sperimentazione matematica. Allora si usava il termine di: "Matematica moderna" ed era un corso che utilizzava ampiamente la teoria degli insiemi. Sono passati 45 anni durante quali abbiamo assistito nella scuola dell'obbligo all'ascesa e in qualche modo al declino degli insiemi. Quindi questo titolo potrebbe sembrare fuori moda?

Ad 1. Lei provoca, ma la sua domanda permette subito di fare una precisazione, che è anche una precisazione sul carattere di questa *Guida*. La teoria degli insiemi non è proposta come argomento di insegnamento, e la *Guida* non è stata scritta con questo proposito. Essa è stata concepita nello spirito di una affermazione, che condivido, fatta recentemente dalla collega Laura Catastini sulla rivista dell'UMI, dove ha scritto: "La libertà progettuale del docente è direttamente proporzionale alla sua cultura, matematica storica e umanistica"[1]. Sono tanti gli argomenti su cui auspicherei che esistessero delle guide, magari fatte meglio, tutte di argomenti non d'insegnamento, per aiutare gli insegnanti ad arricchire la loro cultura: teoria degli algoritmi, categorie, logica, combinatoria ...

Ma neanche 40 anni fa si insegnava la teoria degli insiemi, si insegnava una cosa che si chiamava insiemistica, come spiego nell'introduzione. La *New Math* è stata un festival degli equivoci e delle ambiguità. Quello che si insegnava 40 anni fa era la trasposizione didattica del bourbakismo; e per Bourbaki, la teoria degli insiemi interessava solo come un linguaggio, e la logica ancor meno, era ridotta alla grammatica di questo linguaggio, quindi invisibile. Ma il linguaggio formale doveva solo permettere al matematico di

[*]Registrazione corretta della presentazione di *Guida alla teoria degli insiemi*, UMI-Springer, Collana "Convergenze", 2008, nella forma di intervista a Gabriele Lolli condotta da Fabio Brunelli, al Convegno UMI-CIIM "Costruire il sapere matematico in classe. Il laboratorio di matematica", Verona, 23 ottobre 2009.

[1]L. Catastini, "Concretamente astratto, anzi ... simulabile", *La Matematica nella Società e nella Cultura*, s. I, v. II, n. 1, aprile 2009, pp. 31-69, cit. p. 67.

esprimere in modo preciso e condiviso quello che voleva dire, e che sapeva già di voler dire. Bisognava sbrigarsela in fretta, più che altro per fare un fuoco di sbarramento contro le provocazioni dei filosofi, poi passare alle cose serie, senza starci dentro a rimestare.

Nella scuola, lavorare sul linguaggio, quando non si aveva ancora il contenuto era un non senso, anche nello spirito bourbakista, nel quale infatti si è impantanata la *New Math*. Lo stesso è successo nelle discipline umanistiche, perché lo strutturalismo è stata una moda diffusa; ricordiamo l'incredulità di Tsvetan Todorov per il fatto che nei licei francesi si leggeva Dostoieski non per gustarlo ma per studiare la struttura del romanzo.

L'esito assurdo è stato una svalutazione della teoria degli insiemi e della logica, incolpevoli. Quell'esperienza insegna che anche in campo scientifico si discute sulla base di preconcetti e preclusioni ideologiche; di Max Bebermann, ideatore del progetto Illinois, uno dei primi esperimenti di *New Math*, George Polya disse che era "una brava persona, caduta in mezzo ai logici"[*He is a good man who has fallen among logicians*].

Adesso le persone, se sentono parlare di teoria degli insiemi, reagiscono dicendo: ah, l'abbiamo già sperimentata, o subita, non serve[2].

La teoria degli insiemi ha a che fare con il concetto di infinito, e quindi di finito, e le diverse intuizioni che stanno dietro di essi, e con i modi di ragionare con l'infinito; in secondo luogo con il concetto di numero, numeri finiti e infiniti, numeri ordinali e numeri cardinali. Chi è che decide se serve o non serve, se non il docente alle prese con le eventuali curiosità e attento alla maturità dei suoi studenti?

Purtroppo per liberarsi delle *vulgatae* ricevute bisogna forse aspettare che scompaiano generazioni irrimediabilmente segnate, come per il successo delle nuove teorie fisiche, come diceva credo Max Born. Intere generazioni hanno ripetuto i luoghi comuni orecchiati, senza mai studiare, e chi cerca di raccontare come sono andate le cose ha lo stesso effetto di una *vox clamantis in deserto*.

2. Ci sono parti della matematica che hanno più di duemila anni. La teoria degli insiemi non ha ancora duecento anni. Pure si parla di teoria fondamentale – fondazionale. Come potrebbe spiegare questo fatto ad uno studente del primo anno di liceo?

[2]Un fenomeno analogo si presenta per la logica, in Italia; la prima reazione è: no, la formalizzazione è una catena paralizzante – come se la logica fosse quella di Peano.

Ad 2. Così giovane e così presuntuosa, lei dice. Ma ogni epoca ha la sua esigenza e la sua idea di fondazione, che riguarda sempre qualche argomento specifico e non tutta la matematica. A uno studente di liceo parlerei dei numeri reali, e di come i greci affrontarono la scoperta dei rapporti irrazionali. A loro bastava la definizione di Eudosso, che peraltro non era per nulla facile o intuitiva[3]. Cercherei di far capire come usarono la definizione per la teoria delle proporzioni, con le applicazioni alle aree del libro VI degli *Elementi* che portano alla soluzione dell'equazione quadratica. Nell'Ottocento si aveva bisogno di parlare di numeri associati a quei rapporti, soprattutto per il concetto di limite. Se non si deve solo trattare un numero alla volta, approssimando la soluzione di un problema, e se si deve dare la definizione di continuità, occorre una definizione di cosa sono i numeri reali, e Richard Dedekind (1872) ha trasformato la definizione di Euclide in quella delle sezioni[4]: i numeri sono diventati oggetti infiniti. Nel periodo intermedio, quando si cercava di tradurre analiticamente le intuizioni geometriche del calcolo differenziale, in mancanza di una teoria dei reali si doveva ricorrere agli infinitesimi, un concetto vago (allora) e contestato.

Al proposito, mi viene in mente che nelle proposte di programmi contenute in *Matematica 2003*, si raccomanda di presentare i numeri reali solo in forma "intuitiva", e non come coppie di classi contigue[5]. Non credo si voglia dire di usare la definizione di Euclide, forse si allude ai puntini ... Ma io credo che sia sbagliato costruire nei dettagli i sistemi numerici fino ai razionali e lì fermarsi, senza dare neanche le definizioni delle operazioni, o ricordare almeno la necessità di farlo[6]. Di lì in avanti la matematica diventa una nebbia dove i concetti si intravedono come ombre vaghe, negli studenti si forma l'impressione che la matematica sia imprecisa, approssimativa, oscura; si di-

[3]Le grandezze omogenee A, B e le grandezze omogenee A_1, B_1 hanno il medesimo rapporto se per ogni coppia di numeri interi m, n si ha o insieme $nA < mB$ e $nA_1 < mB_1$, o insieme $nA = mB$ e $nA_1 = mB_1$ o insieme $nA > mB$ e $nA_1 > mB_1$ (Euclide V).

[4]Come Karl Weierstrass aveva assunto la definizione di uguaglianza di rapporti come definizione di uguaglianza di due reali.

[5]*Matematica 2003: La matematica per il cittadino* (su iniziativa del MIUR, UMI, Soc. It. Stat.), Pubblicazioni del MIUR, Tipografia Franzoso, Lugo di Romagna, 2005, per il primo biennio, tema "Numeri e algoritmi".

[6]Dedekind lamentava in proposito: "non è indecente che l'insegnamento della matematica nella scuola passi per uno strumento specifico per la formazione della facoltà del ragionamento quando simili insulti alla logica non sarebbero mai tollerati in alcun'altra disciplina [...]?", Lettera a Lipschitz del 10 giugno 1876, in R. Dedekind, *Scritti sui fondamenti della matematica*, Bibliopolis, Napoli, 1982, pp. 131-2.

strugge l'autostima dei discenti, e prima ancora la loro stima del docente se i ragazzi, che sono impietosi e scafati, avessero l'impressione che il docente stesso si troverebbe in difficoltà (come il professore del giovane Törless).

Ma per venire alle pretese fondazionali della teoria degli insiemi, i fatti sono questi.

Nel 1888 Richard Dedekind ha dato anche la definizione dei numeri naturali[7]. Come lui stesso fa notare, servono solo i concetti di "sistema" e "rappresentazione" (insieme e applicazione, o funzione), che per lui sono concetti logici, nel senso che senza di essi è impossibile pensare. In Germania nell'Ottocento tutti, inclusi i matematici, studiavano logica[8] al liceo.

In questa iniziale introduzione dei concetti insiemistici nella matematica i due concetti di insieme e di funzione sono considerati non matematici e soprattutto sono indipendenti, quello di funzione è primitivo come quello di insieme. Nella teoria delle categorie è tornato a essere primitivo con i morfismi. Chi non aveva le idee chiare di Dedekind ci ha messo un po' a definire le funzioni; si parlava di ricoprimenti (*Belegung*) e altri termini intuitivi. Alla lunga si è trovato che con "insieme di coppie ordinate" si poteva esprimere l'idea di una funzione arbitraria, non subordinata a una legge esplicita. Tutto qui, e un vantaggio di valore precario, se il concetto di funzione torna ad essere assunto come primitivo.

Tra il 1872 e il 1897 intanto si era accumulato materiale sugli insiemi, a opera soprattutto di Georg Cantor, che aveva introdotto le cardinalità con le corrispondenze biunivoche, i numeri finiti e infiniti, cardinali e ordinali, gli insiemi di punti degli spazi $\mathbb{R}^n$ e gli insiemi astratti ordinati e bene ordinati. Quando per la prima volta si assiomatizza la teoria degli insiemi (Zermelo, 1908), dando ad essa uno *status* matematico, l'apprezzamento espresso da Zermelo è stato che essa permetteva di indagare i concetti fondamentali di numero, funzione ed ordine. Non tutta la matematica.

Il riduzionismo, cioè la possibilità di sviluppare tutti i concetti e i risultati matematici in una teoria degli insiemi, appartiene piuttosto al programma logicista di Bertrand Russell, marginale rispetto alla storia della matematica, e alla teoria dei tipi logica. Dopo, è stata ed è una posizione filosofica,

---

[7]R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Vieweg, Braunschweig, 1888; trad. it. con il titolo "Che cosa sono e a cosa servono i numeri?", in *Scritti sui fondamenti della matematica*, cit.

[8]Una logica tradizionale, basata soprattutto sul principio che a ogni concetto corrispondeva una estensione.

Le pretese fondazionali della teoria degli insiemi per la matematica sono invece state avallate e divulgate da Bourbaki, che ha sostenuto che quello insiemistico è il solo linguaggio della matematica, sia nelle minuzie sia con la definizione di struttura (insiemistica) che unificherebbe tutta la matematica[9], ma nello stesso tempo come si è detto la teoria è esclusa dalla matematica.

Nella *Guida* si cerca di chiarire questo aspetto, ma soprattutto si descrive il contenuto matematico della teoria, anche senza spingersi troppo avanti. Delle forme di ragionamento adatte all'infinito si insiste sul ragionamento per induzione e la definizione per ricorsione (codificate da Dedekind, che si generalizzano anche al di là dei numeri naturali); si evita invece di discutere il problema delle infinite scelte, che non si presenta se non lo si segnala esplicitamente, soprattutto quando si lavora con insiemi numerabili, come è effettivamente successo per un lungo periodo. All'insegnante sarebbe utile tuttavia sapere che l'assioma di scelta non è altro che l'enunciazione, per insiemi infiniti, di un principio il cui possesso Piaget riteneva fondamentale come segno della capacità di decentrare: l'affermazione che se un insieme si ripartisce in classi disgiunte e non vuote, più di una, la cardinalità di ciascuna di esse è minore di quella dell'insieme dato.

Nella *Guida* si fissa poi l'attenzione sul concetto di infinito numerabile, che è quello più accessibile all'intuizione: il numerabile è il più vicino al finito, e conserva un'ambiguità tra infinito potenziale e infinito attuale; si presta anche a fare esercizi: gli sforzi erculei di Cantor per le sue prime dimostrazioni hanno finito di diventare facili esercizi. Si invita quindi a fare un collegamento con il modo come l'infinito appare nei processi effettivi, con gli insiemi ricorsivamente enumerabili, simili ai numerabili ma anche con comportamenti divergenti.

3. Parliamo della formazione dei nuovi insegnanti: Qualcuno sostiene che, al di là delle chiacchiere, basta che siano ben preparati: tanti corsi, bravi maestri, buone letture. Qualcun altro ritiene che non è sufficiente la preparazione disciplinare. Occorre una certa inclinazione (vocazione?), la didattica disciplinare, un tirocinio didattico nella scuola. Lei cosa ne pensa?

---

[9] Sono spesso i matematici contrari alla teoria degli insiemi che alimentano il mito delle sue supposte ambizioni fondazionali discutendo se la teoria degli insiemi serva nella matematica normale, e concludendo di no, o solo poco (ad esempio cfr. sito http://borcherds.wordpress.com/2007/12/25/uselessness-of-set-theory/). Non si vede perché dovrebbe servire nella "matematica normale", a parte l'interazione naturale che si verifica tra teorie diverse, e che in parte sussiste per la teoria degli insiemi; quando la geometria serve nell'analisi, non è tutta la geometria che serve, e non per tutta l'analisi.

Ad 3. La preparazione disciplinare è indispensabile, ma non bastano tanti corsi, che poi non ci sono. Gli elementi problematici nella sua formula sono i bravi maestri e le buone letture.

Il neo laureato ha bisogno di una riorganizzazione del proprio sapere in vista della utilizzazione didattica, invece che ad esempio professionale: le conoscenze apprese, se le ha apprese, devono essere ripensate e arricchite.

Quali conoscenze siano indispensabili si può solo descriverlo in termini generali. Per fare apprezzare in classe la matematica non c'è bisogno di rincorrere gli ultimi ritrovati, e tuttavia bisogna essere in grado all'occorrenza di commentare, magari solo intuitivamente, i risultati recenti che avessero qualche risonanza sui *media*. Occorre sapere parlare ad esempio della congettura di Poincaré. Non c'è niente di peggio per un docente che lasciare capire di non sapere rispondere alla eventuale curiosità, maliziosa, forse maligna, degli studenti. Che non capiti loro di doversi comportare come il professore del giovane Törless, nel romanzo di Robert Musil[10]:

> (Prof) ... dovrei fare delle premesse che lei stenterebbe a capire e d'altra parte non ne abbiamo il tempo ... queste quantità che in realtà non esistono, ah, ah, sono un osso duro per un giovane studente ... Caro giovane amico, deve credermi sulla parola ... per adesso, credi!
>
> (Banenberg) Tu, quando ti punge un dubbio, ti guardi subito intorno e ti chiedi: come mettere d'accordo questo con tutto il resto che è in me? *Loro* si sono scavati nel cervello una via tutta a svolte come quella di una lumaca, e guardano solo indietro all'ultima svolta, per vedere se il filo che si lasciano dietro tiene ancora.

Ma soprattutto occorre padroneggiare con raffinatezza le matematiche elementari. Se una volta si pensava che ci fosse un contenuto da trasmettere, il far di conto, adesso l'insegnante deve invece, ed è tanto se ci riesce, far capire che la matematica è bella e interessante, lavorando su argomenti accessibili con poca esperienza. Non so cosa intendesse precisamente Felix Klein con il "punto di vista superiore", ma credo lo si possa interpretare in questo modo: far intravedere l'essenza della matematica con problematiche elementari; far emergere i modi di ragionare, di porsi e risolvere problemi,

[10] *I turbamenti del giovane Törless*, 1906.

le soluzioni, i collegamenti inaspettati, l'introduzione o l'invenzione di nuovi concetti, che si ritrovano in tutti i livelli.

Le conoscenze non sono enunciati autosufficienti e slegati tra loro. Ad esempio la geometria piana va rivisitata sapendo – che non vuol dire pensando di insegnare, ma essendo pronti a cogliere o sviluppare domande, spunti, aperture – sapendo dunque che ci sono le geometrie non euclidee, il che pone il problema di quale sia più reale, o dove sono queste geometrie, e quello della non contraddittorietà relativa; i risultati di impossibilità – bellissima tematica; quindi i legami con l'algebra; i rapporti piano-spazio dal punto di vista della facilità dimostrativa; la proiettiva ecc., in una parola quello che si chiama una visione metamatematica. O si pensi ai nodi, così concreti e visualizzabili, e alle loro connessioni da una parte con i polinomi, dall'altra con la dinamica caotica.

Qualcuno deve aiutare il neo laureato a completare la sua preparazione con una simile capacità di sintesi, non può essere abbandonato a se stesso

Non credo comunque che una didattica disciplinare, se si intende una strategia derivata da teorie generali dell'insegnamento o dello sviluppo, aiuterebbe a cogliere le particolari esigenze dell'apprezzamento della matematica che solo una profonda consuetudine con la disciplina permette di capire.

Il tirocinio serve se fa vedere quello che ci aspetta in classe, e che è altro dalla esperienza passiva delle aule universitarie e anche, perché il tempo passa, da quella vissuta nel proprio percorso scolastico. Serve se fa capire come ci si deve attrezzare. Ma allora non deve essere una classe tradizionale. I neo insegnanti devono sconfiggere una tentazione alla quale, non avendo altre dritte, attualmente soccombono con facilità: quella di ricreare nella propria futura classe l'ambiente che hanno vissuto da allievi, stessi contenuti e stessi metodi. Quando mi sono accorto di questo fenomeno[11] sono trasecolato.

La riproposizione della propria esperienza scolastica bypassando quella universitaria significa che i professori dell'università non hanno lasciato traccia, non hanno offerto un nuovo modello, e il neo insegnante deve ricorrere come modello ai propri professori di liceo, o quella che è stata la loro scuola.

Questo è il vero fallimento dei professori universitari, più ancora dei contenuti dell'insegnamento. Possiamo cantarcela di quanto siamo bravi, ma i bravi maestri non ci sono. Le buone letture non si fanno, forse perché non si è mai iniziato a farle (un solo libro, se non sono le dispense, per ogni corso

[11] L'ho verificato quando ho lavorato per la Sis, e mi confermano che è un atteggiamento diffuso.

universitario), e non si è capita la necessità di farle. Anche le *Guide* servono poco se non è stato instillato nel corso dell'insegnamento il desiderio di continuare ad arricchirsi.

4. I docenti di storia della matematica lamentano che i giovani laureati in matematica nella maggior parte dei casi la ignorano, quelli di geometria sostengono che la geometria Euclidea non è conosciuta, lo stesso si potrebbe ripetere per la statistica e la probabilità. Nel suo testo lei aggiunge all'elenco la teoria degli insiemi. Ma insomma cosa conoscono questi giovani laureati in matematica?

Ad 4. Poco, poco, ma soprattutto male. Il problema è secolare; le università tedesche nell'Ottocento hanno avuto successo perché hanno introdotto l'istituto del seminario, con gli studenti che partecipavano alla ricerca. In Italia se ne è reso conto solo Antonio Gramsci. I miei colleghi ce l'hanno tutti con la logica, ma fanno dei corsi che sembrano iscritti nel *template* dei *Principia Mathematica*. Una cascata inesorabile e senza respiro di assiomi, definizione, teorema, corollario, definizione, teorema, corollario, ... Puro formalismo. Gli studenti ingurgitano e non metabolizzano. Fanno un corso intero sulle funzioni olomorfe e alla fine non sanno cosa sono i numeri complessi.

Attualmente gli studenti seguono tanti corsi di analisi. Imparano strumenti, forse, o utensili (la parola "strumento" ha una sua nobiltà); è probabile che vogliano questo, che si siano iscritti per questo, in maggioranza. Se poi si accorgono che non è tanto divertente come promesso, pazienza, si sopporta finché non si esce. Lo *status* della matematica non è legato al suo valore estetico e intellettuale ma alla sua utilità, forse giustamente. Inevitabilmente l'immagine della matematica è quella della cassetta degli attrezzi. Gli utensili devono essere quelli più aggiornati (e non sempre lo sono), quelli obsoleti non esistono proprio, allora a che serve la storia?

Naturalmente per la didattica questa immagine non va bene. I risultati più interessanti sono quelli in cui si accostano campi diversi, scoprendo analogie o identità insospettate. Nessuno lo negherebbe, ma nessuno fa niente per cambiare l'insegnamento universitario.

Se non si fa capire che la matematica si costruisce, oltre a usarla, e quindi è stata costruita, anche l'interesse per la storia non può nascere e non può essere coltivato nemmeno per conto proprio, con le buone letture di cui si diceva. Se non si fa capire l'esigenza delle dimostrazioni e le loro diverse funzioni, le si impone come il formato naturale della matematica e le si fanno ripetere a memoria[12], allora è inutile insegnare logica. Lo spettro delle materie si restringe, anche per i vincoli imposti dai nuovi regolamenti.

5. Il 27 agosto scorso il Corriere della Sera titolava: "La matematica fa ancora sognare" annunciando l'incremento di iscritti al primo anno di università degli ultimi anni. Allora prof. Lolli di chi è il merito: della beautiful mind di John Nash? Dei festival della matematica? Oppure del superenalotto?

Ad 5. Le fluttuazioni nelle scelte delle nuove generazioni dipendono da tanti fattori poco comprensibili e poco controllabili. Certo la pubblicità serve, e soprattutto la consapevolezza, che ormai filtra da tante crepe della antica congiura del silenzio, che la matematica è dietro ai prodotti più interessanti per i giovani, soprattutto i prodotti della società dell'informazione. Aumenta quindi la considerazione sociale di chi ha una preparazione matematica: si è coniato il termine *quant*, per i professionisti che in campo economico, finanziario, industriale usano, conoscono o si fidano degli strumenti di analisi matematica. I *media* propongono titoli come "La matematica ci aiuterà a guarire"[13] dove si parla delle equazioni anticancro. La crescita degli iscritti a matematica è un fattore di cui rallegrarsi, per vari motivi, non solo corporativi, come c'è da rallegrarsi che la matematica sia tornata a essere applicata, dopo l'involuzione bourbakista.

Tuttavia il numero di chi si dedica a studi superiori di matematica è sempre esiguo rispetto alla popolazione studentesca; per la maggioranza l'obiettivo didattico non può essere quello di far acquisire strumenti applicativi, ma quello di stimolare almeno un apprezzamento per gli aspetti più elevati.

6. Il titolo del suo prossimo libro?

Ad 6. Non so se avrò ancora il tempo di scriverne uno. Mi sembra più facile ora preparare dei semilavorati, ad esempio le dispense dei corsi, e metterle in rete.

7. Prof. Lolli, lei in uno dei suoi libri afferma che vorrebbe costruire "un mo-

[12] Per ora gli studenti le ripetono, subendole, senza capirle, ma quando incominceranno a essere insofferenti (come generazioni) si finirà per eliminarle (come nel progetto di Harvard di qualche anno fa). So che molti di voi su preoccupano di come introdurre gli allievi al pensiero dimostrativo, ma se le prossime generazioni di laureati non solo non avranno il concetto di dimostrazione, ma non le avranno neanche viste, è inutile pensare che possano insegnare a farle.

[13] L. Ripamonti, *Corriere della sera*, 30 ottobre 2009, inserto "Salute".

numento al milite ignoto della matematica"; vorrebbe spiegare al nostro pubblico che cosa intende con questa espressione?

Ad 7. Il milite ignoto è la donna, se non si offende a essere chiamata "Milite". A lungo nella storia hanno lavorato accanto a mariti, fratelli senza essere riconosciute. Quando Julia Robinsono ricevette una medaglia dalla National Science Foundation, la notizia inviata all'università di Berkeley lasciò perplessi gli amministratori che non conoscevano alcuno con questo nome nel loro personale, finché qualcuno ricordò: "Forse è la moglie di Raphael Robinson". Nel seguito Julia divenne la prima donna presidente dell'American Mathematical Society. Poco alla volta escono dall'oscurità. Se dovessi dare un solo nome al milite ignoto, direi appunto quello di Julia Robinson, anche per altri episodi della sua vita che ora non descrivo perché spero che qualcuno che non lo ha già fatto legga *La crisalide e la farfalla*.