Ancora sulla II parte dell'articolo "ALCUNE REGOLARITA' DAI NUMERI PRIMI"

di Guido Carolla[1]

1. Un'osservazione sulle somme contratte e sul software del massimo gap

Facendo seguito a quanto l'autore ha iniziato con l'Appendice della I parte, questa II parte [14] si riapre con un'osservazione importante sulla somma contratta fino ad una sola cifra in riferimento ai numeri primi, alle famiglie di coppie degli stessi ed ai gap tra numeri primi: detta somma contratta non è altro che un argomento della aritmetica modulare, in particolare del modulo 9. Infatti, ad es. il numero primo 97(mod. 9) =7, che è il resto di 97: 9 =10, resto 7, il numero primo 10007(mod. 9) = 8, che è il resto di 10007:9 =1111, resto 8, oppure il gap = 78 è equivalente a 78(mod. 9) = 6, che è il resto di 78:9 = 8, resto 6, il gap = 0 è equivalente a 18 ed a 72(mod. 9) = 0 o 18 (o gap improprio = (9)), come si è detto nella I parte, perché 0 è il resto di 72:9 = 8, ecc..
Molto utile risulta l'interessante software [15] per la ricerca del massimo gap tra numeri primi consecutivi. Con esso, ad es., si sono possono avere fra l'altro valori di gap in tempi brevi, ma anche ad es. due primi di grandezza 10^9, con gap=320, in circa 4 ore di attività del Pc.

p_h: 2300942549

p_{h+1}: 2300942869

gap: 320

2. Risposta alla domanda 1) del Post Scriptum dell'Appendice I parte

Inoltre, in riferimento alle otto domande rivolte ai lettori sulle 8 eventuali congetture, alla fine del paragrafo della II parte parziale, la sequenza dei numeri primi 5, 7, 11, 13, 17, 19, che con il mod. 9 è 5, 7, 2, 4, 8, 1, risolve il caso "disordinato" delle cifre 1, 2, 4, 5, 7, 8: quindi, considerata l'affermazione positiva del caso, la relativa congettura diventa "vi sono altre sequenze di sei numeri primi la cui somma contratta dia 1, 2, 4, 5, 7, 8, in modo "disordinato? Se si, sono infinite?"

3. Aspetto statistico sulle famiglie e sulle relative minori coppie dei primi

In apertura del presente paragrafo è opportuno ridare una definizione di coppia di numeri primi in riferimento alle loro differenze, o distanze o come già detto ai loro gap: in generale detto p_h un numero primo $\forall p_h > 3$, siano le coppie di primi consecutivi p_h e p_{h+1} o per *h*<*k* i non consecutivi p_h e p_k, per definizioni si hanno rispettivamente $p_{h+1} = p_h + gap$ o $p_k = p_h + gap$.
Detto ciò, proprio con i sei numeri primi riportati nel § 2 (ma è solo un aspetto statistico, e tale da ora in poi è il contenuto di tutto il paragrafo) si possono ottenere 21 delle 36+6 (quelle del gap=18) famiglie di minori coppie di primi, infatti per il gap = 8 alle famiglie (2 – 1), (5 – 4) appartengono rispettivamente le coppie di primi 11,19 e 5,13; per il gap = 0 alle famiglie $(1-1),(2-2),(4-4),(5-5),(7-7),(8-8)$ appartengono rispettivamente le coppie 19, 19, 11, 11, 13, 13, 5, 5, 7, 7, 17, 17; per il gap = 10 alla famiglia (7 – 8) appartiene la coppia 7, 17; per il gap = 2 alle famiglie $(2-4),(5-7),(8-1)$ appartengono r. le coppie 11, 13, 5, 7 e 17, 19; per il gap = 12, alle famiglie (5 – 8) e (7 – 1) appartengono r. le coppie 5, 17 e 7, 19; per il gap = 4, alle famiglie (4 – 8) e (7 – 2) appartengono r. le coppie 13, 17 e 7, 11; per il gap = 14, alla famiglia (5 – 1) appartiene la coppia di primi 5, 19; infine per il gap = 6, alle famiglie $(2-8),(4-1),(5-2),(7-4)$ appartengono r. le coppie 11, 17, 13, 19, 5, 11 e 7, 13. Le minori coppie di primi appartenenti a ciascuna delle altre 15+6 (quelle del gap=18) famiglie , oltre che con

[1] Docente ordinario di Matematica e Dirigente scolastico in ogni ordine di scuola a r.; e-mail: guidocarolla@libero.it

i sei primi di cui sopra, sono formate con i seguenti altri otto primi, 23, 29, 31, 37, 43, 53, 61, 71: infatti per il gap = 8 alla famiglia (8 – 7) appartiene la coppia 53, 61; per il gap = 18 alle famiglie $(1-1),(2-2),(4-4),(5-5),(7-7),(8-8)$ appartengono rispettivamente le coppie di primi 19,37, 11,29, 13,31, 5,23, 43,61, 53,71; per il gap = 10 alle famiglie (1 – 2), (4 – 5) appartengono r. le coppie 19,29, 13,23; per il gap = 12 alle famiglie $(1-4),(2-5),(4-7),(8-2)$ appartengono r. le coppie 19,31, 11,23, 31,43, 17,29; per il gap = 4 alla famiglia (1 – 5) appartiene la coppia di primi 19, 23; per il gap = 14 alle famiglie (2 – 7), (8 – 4) appartengono r. le coppie 29,43, 17,31; per il gap = 6 alle famiglie (1 – 7), (8 – 5) appartengono r. le coppie 37,43, 17,23; per il gap = 16 alle famiglie $(1-8),(4-2),(7-5)$ appartengono r. le coppie 37,53, 13,29 e 7,23.
Quindi, le minori coppie di primi, consecutivi o non consecutivi, di ciascuna delle 42 famiglie si possono avere, escludendo 2, 3, 41, 47, 59, 67, dai quattordici primi dal 5 al 71, ovvero l'argomento in questione può essere affrontato con l'elenco iniziale di soli venti numeri primi.

4. Teoria "ingenua" degli insiemi[2] per la funzione p(s)

Si noti che il presente paragrafo tratterà i numeri primi in relazione alle somme contratte delle cifre.
Premesso che la funzione[3] *p(s)*, con $p \in P$ dipendente dalla variabile $s \in S$, determina una <u>relazione binaria</u> *R* tra due insiemi distinti *S*, insieme che si ottiene dall'aritmetica modulare 9 o dalle somme contratte di ogni numero primo fino ad una sola cifra, e *P,* insieme dei numeri primi (escluso il 3), in quanto si istituisce una corrispondenza tra gli elementi di detti insiemi, essendo $S = \{1,2,4,5,7,8\}$ et $P = \{P(1), P(2), P(4), P(5), P(7), P(8)\} \setminus \{3\}$, ove $P(1) = \{19,37,73,109,...\}$, la cui somma contratta delle cifre di ogni numero primo è s=1, $P(2) = \{2,11,29,47,83,...\}$, con $s = 2$, … $P(8) = \{17,53,71,107,...\}$, con $s = 8$, si ha:
s R P(s) e si dice che *P(s)* è il corrispondente di *s* secondo la *R* .

R:s è la somma contratta fino ad una sola cifra di ogni numero primo appartenente all'insieme *P(s).*
La funzione *p(s)* è, come detto, ogni numero primo, escluso il 3, appartenente al sottoinsieme *P(s)* che ha la somma contratta fino ad una sola cifra che è *s*.

Detta funzione *p(s)* definita nell'insieme *P* determina una <u>relazione d'equivalenza</u> *Re* in quanto gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.
Infatti: $p_i = p_i \quad \forall\, p_i \in P$, essendo $P = \{p : p \text{ è numero primo}\} \setminus \{3\}$

$$p_i = p_j \rightarrow p_j = p_i \quad \forall\, p_i, p_j \in P$$

$$(p_i = p_j \text{ et } p_j = p_z) \rightarrow p_i = p_z \quad \forall\, p_i, p_j, p_z \in P$$

Detta relazione di equivalenza *Re* definita nell'insieme *P* inoltre determina una decomposizione dell'insieme in sottoinsiemi costituiti, come detto sopra, da *P(1),P(2),P(4),P(5),P(7),P(8)* che a loro volta sono costituiti ciascuno da elementi equivalenti in riferimento alle somme contratte *s* , rispetto alla relazione *Re*.
I sottoinsiemi così ottenuti sono non vuoti, disgiunti a due a due e la loro unione dà l'insieme *P*. Si ottiene insomma una <u>partizione dell'insieme</u> dato *P*.

[2] La teoria degli insiemi - elaborata dal famoso matematico Georg Cantor a partire dal 1870 e sviluppata successivamente da vari autori è oggi una branca acquisita della matematica - quella formulazione che oggi viene chiamata "teoria ingenua degli insiemi" (naive set theory), non è affatto ingenua e per dirla col filosofo americano W. V. O. Quine, è "un lupo travestito d'agnello".
[3] Si dice funzione o applicazione perché è una particolare corrispondenza tra due insiemi, in questo caso tra *S* e *P* , tale che ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed uno solo del secondo.

Ogni sottoinsieme *P(s)* può essere individuato da uno degli elementi (numeri primi) che lo costituiscono (es. *P(2)* è individuato da qualsiasi primo la cui somma contratta è 2, cioè da 2, 11, 29, 47, 83, …). Si dice che la relazione *Re* ha decomposto l'insieme *P* in classi d'equivalenza .
Infine *P/Re* è l'insieme quoziente di *P* rispetto ad *Re* ed è l'insieme i cui elementi (sottoinsiemi *P(1),P(2),P(4),P(5),P(7),P(8)* sono le classi d'equivalenza ottenute da *P* applicando la suddetta relazione *Re* .

A seguire sono rappresentati con i diagrammi di Eulero-Venn i due insiemi *S* e *P* i cui elementi sono in corrispondenza biunivoca.

```
              _____________          _____________
   S    /              /        P     /             /
       /     1 ←------/-------------------/---→P(1)     /
      /_____________/              /___________  /
     /      2 ←------/------------------/--→P(2)      /
    /_____________ /             /_____________/
   /      4 ←------/------------------/---→P(4)      /
  /_____________ /             /_____________ /
 /      5 ←------/------------------/---→P(5)      /
/_____________/              /_____________  /
/      7 ←------/------------------/---→P(7)      /
/_____________ /             /_____________ /
/      8 ←------/-----------------/---→P(8)       /
/______________/             /______________/
```

5. Teoria "ingenua" degli insiemi per la funzione g(f,s)

Tenendo presente la tab. 10 della I parte, che per comodità di consultazione si riporta alla fine del paragrafo, si consideri la funzione gap *g(s,f)* con la variabile *f* che è il gruppo di famiglie delle coppie di numeri primi consecutivi ed *s* che qui è la somma contratta dello stesso gap (fino ad una sola cifra 2, 4, 6, 8 e (1), (3), (5), (7), (9), questi ultimi numeri in parentesi che si sono denominati gap impropri si riferiscono rispettivamente ai gap pari 10, 12 , 14, 16, 18. Esempi: per i gap = 2,20,38,56,… è sempre *s=2*; per i gap=14,32,50,68,… si ha sempre l'improprio *s = (5)* che corrisponde a 14, il minore di tutti gli equivalenti 32, 50, 68, 86, …; ecc.).
Detta funzione *g*, definita nell'insieme *G*, determina una relazione d'equivalenza *Rg*, in quanto gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.
Infatti: : $g_i = g_i \quad \forall g_i \in G$, essendo $G = \{g : g \text{ è numero pari}\}$

$$g_i = g_j \rightarrow g_j = g_i \quad \forall g_i, g_j \in G$$

$$(g_i = g_j \text{ et } g_j = g_z) \rightarrow g_i = g_z \quad \forall g_i, g_j, g_z \in G .$$

Detta relazione di equivalenza *Rg* , definita nell'insieme *G* inoltre determina una decomposizione dell'insieme in sottoinsiemi costituiti da $G_2, G_4, G_6, G_8, G_{10}, G_{12}, G_{14}, G_{16}, G_{18}$ che a loro volta sono costituiti ciascuno da elementi equivalenti in riferimento alle somme contratte *s* ($G_2 = \{g_2, g_{20}, g_{38}, g_{56}, ...\}, G_4 = \{g_4, g_{22}, g_{40}, g_{58}, ...\}, ..., G_{18} = \{g_{18}, g_{36}, g_{54}, g_{72}, ...\}$ e relativi gruppi delle famiglie di coppie di numeri primi (v. tab. 10)) , rispetto alla relazione *Rg*.
I sottoinsiemi così ottenuti sono non vuoti, disgiunti a due a due e la loro unione dà l'insieme *G*. Si ottiene insomma una partizione dell'insieme dato *G*.
Ogni sottoinsieme G_s può essere individuato da uno degli elementi (numeri pari) che lo costituiscono (es. G_2 è individuato da qualsiasi numero pari la cui somma contratta è sempre 2, cioè da 20, 38, 56, 74, …). Si dice che la relazione *Rg* ha decomposto l'insieme *G* in classi d'equivalenza .

Infine *G/Rg* è l'insieme quoziente di *G* rispetto ad *Rg* ed è l'insieme i cui elementi (sottoinsiemi $G_2, G_4, G_6, G_8, G_{10}, G_{12}, G_{14}, G_{16}, G_{18}$ sono le classi d'equivalenza ottenute da *G* applicando la suddetta relazione *Rg* .
Si noti che ai sottoinsiemi $G_2, G_4, G_8, G_{10}, G_{14}, G_{16}$ corrispondono gruppi di tre famiglie ciascuno di coppie di numeri primi ed ai sottoinsiemi G_6, G_{12}, G_{18} corrispondono gruppi di sei famiglie ciascuno di coppie di numeri primi, come risulta dalla tab. 10, da quanto segue con le rappresentazioni estensive e dal diagramma di Eulero-Venn, per cui si hanno:
$S_g = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$ è l'insieme dei minori numeri pari, i cui elementi sono in corrispondenza con i sottoinsiemi di *G* di cui si è detto sopra; l'insieme *F* è dato dall'unione dei sottoinsiemi, non vuoti e a due a due disgiunti, composti dai gruppi di famiglie, che nel diagramma di Eulero-Venn che segue sono stati posti in verticale, da sopra a sotto,

$F = \{(2-1),(5-4),(8-7)\} \cup$
$\{(1-1),(2-2),(4-4),(5-5),(7-7),(8-8)\} \cup \{(1-2),(4-5),(7-8)\} \cup \{(2-4),(5-7),(8-1)\} \cup$
$\{(1-4),(2-5),(4-7),(5-8),(7-1),(8-2)\} \cup \{(1-5),(4-8),(7-2)\} \cup \{(2-7),(5-1),(8-4)\} \cup$
$\{(1-7),(2-8),(4-1),(5-2),(7-4),(8-5)\} \cup \{(1-8),(4-2),(7-5)\}$,

inoltre tra *G* ed *F* si hanno le seguenti corrispondenze biunivoche dei sottoinsiemi
$G_8 \leftrightarrow \{(2-1),(5-4),(8-7)\}$, $G_{18} \leftrightarrow \{(1-1),(2-2),(4-4),(5-5),(7-7),(8-8)\}$,
$G_{10} \leftrightarrow \{(1-2),(4-5),(7-8)\}$, $G_2 \leftrightarrow \{(2-4),(5-7),(8-1)\}$,
$G_{12} \leftrightarrow \{(1-4),(2-5),(4-7),(5-8),(7-1),(8-2)\}$, $G_4 \leftrightarrow \{(1-5),(4-8),(7-2)\}$,
$G_{14} \leftrightarrow \{(2-7),(5-1),(8-4)\}$ $G_6 \leftrightarrow \{(1-7),(2-8),(4-1),(5-2),(7-4),(8-5)\}$,
$G_{16} \leftrightarrow \{(1-8),(4-2),(7-5)\}$.

```
          ___________________________________________________________
F       |       |       |     |     |     |      |     |     |      |
        |       | (1 – 5)|(1 – 7)|   |(1 – 2)|(1 – 4) |   |(1 – 8)|(1 – 1) |^
        |       |       |     |     |     |      |     |     |      |\
        | (2 – 4)|      |(2 – 8)|(2–1)|   |(2 – 5) |(2 – 7)|   |(2 – 2) |  \
        |       |       |     |     |     |      |     |     |      |   \
        |       | (4 – 8)|(4 – 1)|   |(4 – 5)|(4 – 7)|   |(4 – 2)|(4 – 4) |    \
        |       |       |     |     |     |      |     |     |      |     \
        | (5 – 7)|      |(5 – 2)|(5–4)|   |(5 – 8)|(5 – 1) |   |(5 – 5) |      \
        |       |       |     |     |     |      |     |     |      |       \
        |       | (7 – 2)|(7 – 4)    |(7 – 8) |(7 – 1)|   |(7 – 5)|(7 – 7  |^       \
        |       |       |     |     |     |      |     |     |      |\        \
        | (8 – 1)|      |(8 – 5)|(8–7)|   |(8 – 2) |(8 – 4)|   |(8 – 8) |  \        \
        |___^_|___^_ |__ ^__|__^__ |_^_ |___^___|_^___|__^__ |__^___|   \Rg       \
             |      |     |      |     |      |     |      |     |         \         \R
G          _|_____ |____ |_____ |___ _|_____ |_____|______|_____|___       /         /
           | v    | v   | v    | v |   v  |   v  |  v  |    v |    v  | /          /
           |  G2 | G4 | G6 | G8 | G10 | G12 | G14| G16 | G18 |v          /
           |___^_|__^_ |__ ^_|__^ _|__^__|__ ^ __|__^ _|__ ^__ |__^___|        /
                |     |     |     |     |       |       |      |     | ^R1    /
Sg          ___|____|_____|____|____|_____ |______|_____|_____|__|__      /
            |   |  |   |  |  |  |  |  |  |  |   |   |   |   |  |   |  |  |    | /
            |  2  |   4  |  6  | 8 |  10 |   12  |  14 |   16  |  18     |/
            |____ |_____|____ |___ |____ |______|_____|______|______ |
```

Il diagramma di Eulero-Venn, compilato senza aver utilizzato alcun software, risente di qualche imperfezione, ma si spera sia ugualmente comprensibile, essendo completo per quanto attiene i sottoinsiemi (gruppi di famiglie) di F e le corrispondenze biunivoche di questi con i sottoinsiemi (gruppi di gap equivalenti, di cui si evidenzia l'equivalenza tra i gap 0 e 18) di G, per i quali si rimanda il lettore ad un facile controllo, di quanto si è riportato sopra in forma estensiva.

Come detto, all'insieme F appartengono 9 sottoinsiemi non vuoti e a due a due disgiunti, per un totale di 36 famiglie di coppie di numeri primi e i due insiemi G ed F hanno i relativi elementi (sottoinsiemi) in corrispondenza biunivoca, per cui si determina la relazione binaria Rg .

Inoltre avendosi tra gli insiemi S_g e G [4] una relazione univoca R_1 tra i rispettivi elementi e tra gli insiemi G ed F la relazione biunivoca R_g tra i rispettivi elementi (sottoinsiemi disgiunti di F e G), sussiste anche una relazione univoca tra gli insiemi S_g ed F, con le relative corrispondenze riscontrabili anche dalla tab. 10, per cui si ha una <u>composizione di relazioni binarie</u> che si indica: $R = R_1$ o R_g che si legge: R uguale ad R_1 composto R_g .

Per facilitare la consultazione della tanto spesso richiamata tab. 10 della I parte del presente lavoro, a seguire si riporta la stessa:

tab. 10

Gruppi equivalenti di gap tra due num. primi	Gruppi famiglie	Num. famiglie	Som. nn. cc. famiglia	Som.d.s.
2, 20, 38, 56, 74, 92, ...	(2 - 4),(5 – 7),(8 – 1)	3	6, 3, 9	9
4, 22, 40, 58, 76, 94, ...	(1 – 5),(4 – 8),(7 – 2)	3	6, 3, 9	9
6, 24, 42, 60, 78, 96, ...	(1–7),(2 -8),(4 -1),(5-2),(7-4),(8-5)	6	8, 1, 5, 7, 2, 4	9
8, 26, 44, 62, 80, 98, ...	(8 - 7),(2 – 1),(5 – 4)	3	6, 3, 9	9
(1),10,28,46, 64, 82, ...	(1 – 2),(4 – 5),(7 -8)	3	3, 9, 6	9
(3),12,30,48, 66, 84, ...	(1–4),(2-5),(4-7),(5-8),(7-1),(8-2)	6	5, 7, 2, 4, 8, 1	9
(5),14,32,50, 68, 86, ...	(2 – 7),(5 – 1),(8 -4)	3	9, 6, 3	9
(7),16,34,52, 70, 88, ...	(1 - 8),(4 - 2),(7 – 5)	3	9, 6, 3	9
(9),0,18,36,54,72,90, ...	(1-1),(2-2),(4-4),(5-5),(7-7),(8-8)	6	2, 4, 8, 1, 5, 7	9
Totali 9	9	36	9	9

6. Il Teorema sulle coppie di primi dei vari gap

In riferimento al paragrafo 3 della I parte [14], tenendo presente l'importante Teorema 1 [13] si può enunciare il seguente Teorema : "Senza considerare 2 e 3, tutti i numeri primi dei vari gruppi di gap equivalenti, le loro potenze ed il loro prodotto sono rispettivamente di tipo o formule riportate nella tabella 12 I parte, escludendo ovviamente che vi siano sempre il 2 e il 3 come fattori primi".

Per comodità di consultazione, dalla I parte, si riporta a seguire la tab. 12 ed in essa si noti che quando il coefficiente di n è dispari e il *gap/2* è pari allora n e' sempre dispari, se invece il *gap/2* è dispari allora n e' sempre pari:

.

[4] L'applicazione di Sg su G è detta suriettiva e costituisce una biiezione perché è anche iniettiva in quanto ad elementi distinti del dominio corrispondono immagini distinte del condominio. Mutatis mutandis per gli insiemi G ed F .

Gruppi di gap equivalenti	Tipo o formula generale	Variazione di n
a 2, a 10, a 14	$6n \mp gap/2$	n intero ≥ 1
a 4, a 8, a 16	$3n \mp gap/2$	n intero ≥ 3
a 6, a 18	$2n \mp gap/2$	n intero ≥ 4
a 12	$n \mp gap/2$	n intero ≥ 11

7. Ringraziamenti e constatazioni di originalità

Per la stesura di questa II parte si hanno nei confronti di Fausto Maggiore, Amedeo De Mattia, Carlo Tre[5] dei debiti specifici, avendo in gran parte letto l'articolo e dato all'autore alcuni suggerimenti, che hanno sicuramente migliorato in molti modi lo stesso. Non si è voluto rinunciare alla parte connessa sugli aspetti relativi alla teoria "ingenua" degli insiemi, perché si ritiene che essi siano serviti a meglio valorizzare i contenuti della trattazione e alcune regolarità che, a detta di Giovanni Ricci, 1° articolo § 2, § 4 [16], fino al 1951 non potevano esserci, contrariamente a quanto l'autore nel § 4 della I parte aveva dubitato; visto che dal '951 fino ad oggi per quanto si sia ricercato non è emersa altra pubblicazione simile se non la [1], appare evidente l'originalità di tutto l'articolo.
L'autore sarà grato al lettore che vorrà procedere a qualche commento e ad eventuali integrazioni, che potranno migliorare la qualità del lavoro.

Lecce, febbraio 2009

Bibliografia

[1] Antonio Della Rocca – Alberto Trotta, "Alcune proprietà significative dei numeri primi gemelli", Periodico di matematiche, Organo della Mathesis, N. 2 Mag-Ago 2008 Vol. 1 Serie X Anno CXVIII
[2] S. Lang, "La Bellezza della Matematica", Torino, Bollati Boringhieri, 1991
[3] J. H. Conway & R. K. Guy, "Il libro dei numeri", Milano, Hoepli, 1999
[4] H. Davenport, "Moltiplicative Number Theory" (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 74), Berlin, Springer Verlag, 2000
[5] David Wells, "Personaggi e paradossi della Matematica", Milano, Arnoldo Mondatori Editori S. p. A., 2002
[6] G. Carolla, "Formula $p_k = p_h + 2 \cdot n$ dei numeri primi ed altre considerazioni (I parte)" riportato per gentile concessione della Mathesis in www.matematicamente.it, nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", a seguito comunicazione in Congresso Nazionale della Mathesis di Vico Equense (NA), località Seiano – 3,4,5,6 Novembre 2003. Riportato anche su www.desmatron.altervista.org/number_theory/goldbach.php
[7] G. Carolla, "Considerazioni su tre congetture matematiche (II parte)" riportato sul sito www.matematicamente.it nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", 2003
[8] G. Carolla, " I numeri primi di Fibonacci sono infiniti?", riportato sul sito www.matematicamente.it, nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", 2004
[9] G. Carolla – F. Maggiore, "Dimostrazioni per deduzione e per induzione", riportato sul sito www.matematicamente.it, nella sezione Approfondimenti: idee interessanti. 2005

[5] rispettivamente docente di Matematica e Fisica a r., docente ordinario di Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali nella S. M. S. "D. Alighieri" e Docente di Matematica e Preside a r., tutti di Lecce

[10] G. Carolla, Una nota sull'articolo "Formula ... dei numeri primi ed altre considerazioni (I parte)", riportato sul sito www.matematicamente.it nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", 2006
[11] G. Carolla, "Alcuni problemi irrisolti", riportato sul sito www.matematicamente.it nella sezione Approfondimenti – Matematica, 2007 (v. "Nota integrativa…" che segue)
[12] G. Carolla, "Risolte le congetture di Goldbach e Polignac?" e relativa "Nota integrativa…", riportati sul sito www.maecla.it nella sezione Matematica, Problemi, articoli, …,2007
Facendo riferimento ai lavori sui numeri primi dello stesso autore, si sono indicati i siti che li riportano, ma gli articoli si potranno consultare direttamente anche con "Google".
[13] F. Di Noto, A. Tulumello, G. Di Maria, M. Nardelli, "I numeri primi gemelli e l'ipotesi di Riemann generalizzata" pubblicato sul sito www.gruppoeratostene.com, 2008.
[14] G. Carolla, "Alcune regolarità dai numeri primi" pubblicato su www.gruppoeratostene.com, 2009 e su www.maecla.it, 2009.
[15] G. Di Maria, Software "CRAMER 01": programma per la ricerca del massimo GAP tra numeri primi", pubblicato su www.gruppoeratostene.com , 2008.
[16] G. Ricci, "Repertorio di Matematiche" CEDAM Padova, 1951.